数理解析研究所講究録
58巻 1968年 56-82

二階楕円型偏微分方程式の無限境界値問題

名大 理　中井 三留

§1. 序

Mを非完閉m次元($m \geq 2$)可付号連結C^{∞}多様体M_0の末部即ちM_0の相対非完閉な部分領域MでそのM_0に関する相対境界αは有限個のC^3級の単純閉超曲面からなるとする．但しMはM_0全体でもかまわぬから$\alpha=\phi$の場合もある．Mの理想境界をβとする．$M\cup\alpha$がM_0内完閉でないと仮定しているから無論$\beta\neq\phi$であるが，βの位相的実現方法は問題としないで単に$\alpha\cup M\cup\beta$が完閉位相空間となることだけを仮定する．

$M\cup\alpha$上次の形の二階楕円型偏微分作用素Aを考える：

$$(1)\quad Au(x)=-\frac{1}{\sqrt{a(x)}}\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{a(x)}\,a^{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x^j}\right)+\sum_{i=1}^{m}b^i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x^i}+c(x)u(x),$$

こゝに$(a^{ij}(x))$と$(b^i(x))$は夫々$M\cup\alpha$上C^2及びC^1級の反変テンソル，$c(x)$は$M\cup\alpha$上のC^1函数で

$$(2)\qquad c(x)\geq 0\quad (x\in M\cup\alpha)$$

を満足するものとする．又$(a^{ij}(x))$は各$x\in M\cup\alpha$につき対称且

眞に正定付号で $(a_{ij}(x))=(a^{ij}(x))^{-1}$, $a(x)=\det(a_{ij}(x))$ とし，加うるに次の仮定を置く：

(3) $$c(x) \not\equiv 0 \quad \text{又は} \quad \alpha \neq \phi.$$

$M \cup \alpha$ 内完閉な台をもつ C^1 函数 f をとる時，$\alpha \cup M \cup \beta$ 上の広義連続函数 u で $u|M \in C^2(M)$ 且

(4) $$A(u|M) = \dot{f}|M, \quad u|\alpha = 0, \quad u|\beta = \infty$$

となる如き u を求める問題 $\pi(M, A; \alpha, \beta; f)$，いわば無限値境界値問題を考える．

條件(3)があるときは M上の Dirichlet 問題に関する A_x の Green 函数 $G(x, y)$ が存在することはよく知られている（Ito [3]）．$M \cup \alpha$ の完閉集合の補集合 N で

(5) $$\sup_{(x,y)\in N\times N,\, x\neq y} \frac{G(x,y)}{G(y,x)} < \infty$$

となるものがとれるとき，A は M上殆自己共役と呼ぶことにする．

上と同種の N で $\alpha \cap \bar{N} = \phi$ なるものを任意にえらぶとき，

(6) $$\inf_{x\in N} G(x, y) > 0$$

がある $y \in M$ で，従ってすべての $y \in M$ で，成り立つとき，理想境界 β は A放物的であると言うことにする．

我々の目的は次の結果に証明を与えることである：

主定理：Aが殆自己共役且βがA放物的ならば，任意の函数fに対し問題$\pi(M, A; \alpha, \beta; f)$は解をもつ．

この結果は$M_0 \subset E^3$（3次元Euclid空間），$A = \Delta$（Laplace作用素）の時Evans [1] が初めて証明した．それとは独立に$M_0 \subset E^2$，$A = \Delta$でSelberg [15] が同じ結果を得た．彼等の名に因んでこれらの解のことをEvansポテンシャル又はEvans-Selbergポテンシャルと調和函数論では呼んでいる．Evansの方法が$M_0 \subset E^2$の場合にも適用出来ることをNoshiro [13] が示した．これらの結果は二つの方向への拡張の出発点となる．第一はΔを更に一般の楕円型作用素に拡げること，第二は方程式の定義域を多様体に拡げることである．前者については$M_0 \subset E^2$又はE^3で$Au = -\Delta u + \sum b^i \frac{\partial u}{\partial x^i} + cu$の場合のInoue [2] の研究がある．后者即ちMを多様体にする最初の試みはMがRiemann面，$A = \Delta$の時Kuramochi [6] によってなされ，同じ状況のもとに [8] が別証を与えた．それはSario-Noshiroの教科書 [14] に詳しく紹介されている．更に [10] はMがRiemann面，$Au = -\Delta u + cu$の場合で証明した．

上述の主定理は以上の諸結果の一般化であるが，結果の報告 [12] のみで証明はこゝで初めて発表する．

§2. Green函数

仮定(3)のもとでM上(1)のGreen函数$G(x,y)$が存在すること及びそれらの基本的性質については伊藤[3, 4, 5]に詳しい。それらの結果は自由に使う。我々は、更に、任意にMの座標小球Bを取る時$(x,y)\in B\times B$, $x\neq y$, に対して定義された有界函数$\omega(x,y)$で$1/\omega(x,y)$も有界となるものが存在して

$$(7)\qquad G(x,y)=\begin{cases}\omega(x,y)\,|x-y|^{2-m} & (m\geq 3)\\ \\ \omega(x,y)\log|x-y|^{-1} & (m=2)\end{cases}$$

が凡ての$(x,y)\in B\times B$, $x\neq y$, で成立することを本質的に使いたい。このことは伊藤[3]の$G(x,y)$の構成法をみるとわかる筈であるが、こゝではB上(1)のGreen函数$G_B(x,y)$が存在して(7)を満足している(Miranda [7]のCapitolo II)ことを基礎にして、仮定(3)のもとでM上に(1)のGreen函数$G(x,y)$が存在して(7)を満足することを交代法によって示そう。

B内に十分小な同心球B_0をとり、もし$\alpha=\emptyset$なら$M-B_0$上$c\neq 0$である様にしておく。∂B_0での境界値1, αで0, βにおける"境界値"0となる$M-\overline{B}_0$上$Au=0$の解$w(x)$をとると(3)から

$$(8)\qquad \gamma=\max_{x\in\partial B} w(x)<1$$

となる．こゝで β における境界値 0 とは $\alpha \cup M$ を内部から相対完閉な滑らかな領域の増加列 $\{M_n\}$, $\alpha \subset \overline{M}_n$, で近似して，$\partial M_n - \alpha$ 上の境界値 0 としたものゝ極限とすることを意味すると定める．

各 $\varphi \in C(\partial B)$ に対し $K\varphi$ で $\overline{B}$ 上連続，$K\varphi | \partial B = \varphi$ 且 B の上で $A(K\varphi | B) = 0$ となるものを表す．同じく各 $\varphi \in C(\partial B_0)$ に対し $K_0\varphi \in C(M - B_0)$ で，$K_0 \varphi | \partial B_0 = \varphi$, $K_0\varphi | \alpha = 0$, $K_0\varphi$ の β に於る"境界値" 0 となる $M - \overline{B}_0$ 上 $Au = 0$ の解となるものを意味する．更に $\varphi \in C(\partial B_0)$ に対し $T\varphi = K(K_0\varphi | \partial B) | \partial B_0$ とおくと (8) により $\|T\| \leq q < 1$ であって，$y \in B_0$ のとき

$$\psi(\cdot, y) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n(G_B(\cdot, y) | \partial B_0)$$

が定義できて

$$G(x, y) = \begin{cases} (K_0 \psi(\cdot, y))(x) & (x \in M - B_0); \\ (K(K_0 \psi(\cdot, y)))(x) + G_B(x, y) & (x \in B) \end{cases}$$

とおくと $(M - B_0) \cap B$ で上下の二函数が一致してうまくこれが定義され求める Green 函数になっていることがわかる．

$G(\cdot, y) | \partial B_0 = T\psi(\cdot, y) + G_B(\cdot, y) | \partial B_0$ に注意して sup ノルムを使って次の評価を得る：

$$\|G(\cdot, y) - G_B(\cdot, y)\|_{\partial B_0} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} T^n (G_B(\cdot, y) | \partial B_0) \right\|_{\partial B_0} \leq \frac{q}{1-q} \|G_B(\cdot, y)\|_{\partial B_0}.$$

$Au=0$ の解に対する一致の定理を利用すると，$x\in B$ に対し

$$(K(G(\cdot,y)|\partial B - G_B(\cdot,y)|\partial B))(x) = G(x,y) - G_B(x,y)$$

が $x \neq y$ で成り立つことがわかり上の右辺は B 上 $A_x u=0$ の解となり，B_0 内更に小なる同心球 B_1 をとって $l=\sup_{y\in B_1}\|G_B(\cdot,y)\|_{\partial B_0}$ とおけば

$$(9) \qquad \|G(x,y)-G_B(x,y)\|_{B_1\times B_1} \leq lq/(1-q)$$

となる．これと $G_B(x,y)$ が B_1 上 (7) を満足することから同じことが $G(x,y)$ についても結論できる．

§3. Čech 境界

これ以后は特に断らぬ限り主定理証明の方便の為 $(\alpha\cup M)\cup\beta$ が $\alpha\cup M$ の Čech 完閉化となる様な β の位相的実現を考える，即ち $\alpha\cup M$ 上の広義連続函数は $\alpha\cup M\cup\beta$ 迄広義連続拡大が出来る様な β をとる．各 $y^*\in\beta$ に対し $\lim_{y\in M, y\to y^*} G(x,y)\equiv G(x,y^*)$ は M 上 $Au=0$ の解で (6) より真に正，又 α で境界値が 0 となる．そこで $(x^*,y^*)\in(\alpha\cup M\cup\beta)\times(\alpha\cup M\cup\beta)$ に対し

$$(10) \qquad G(x^*,y^*)\equiv \lim_{x\in M,\, x\to x^*}\Big(\lim_{y\in M,\, y\to y^*} G(x,y)\Big)$$

と定義し $G(x,y)$ の定義域 $(\alpha\cup M)\times(\alpha\cup M)-$(対角線集合) をば $(\alpha\cup M\cup\beta)\times(\alpha\cup M\cup\beta)$ 迄延長しておく．$y^*\in M$ の時 $\alpha\cup M\cup\beta$ 上 y^* 中心の小球の外で $G(\cdot,y^*)$ は有界連続函数である．

§4 第一種エネルギー $\gamma(\beta_n)$

以下 M の部分領域列 $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ で次の条件を満すものを一つ固定する：

$$\overline{M}_n \subset \alpha \cup M_{n+1} \quad (n=1, 2, \cdots), \quad M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

且 $\alpha \subset \partial M_n$ で，

$$\beta_n = \partial M_n - \alpha$$

$(n=1, 2, \cdots)$ は有限個の C^3 級の単純閉超曲面からなる．ついでに $\beta_0 = \alpha$ とおくことにする．

M_n 上 $Au=0$ の解 w_n で β_0，β_n における境界値が夫々 0 及び 1 であるものを β_n の<u>内部A測度</u>と呼ぶ．$M-\overline{M}_n$ 上 $Au=0$ の解 $\check{w}_n$ で β_n に於る境界値 1，β に於る"境界値" 0 となるものを β_n の<u>外部A測度</u>と呼ぶ．

Riemann 計量 $(a_{ij}(x))$ に関しての ∂M_n の曲面素を dS，M_n に関する ∂M_n での外法線微分を $\frac{\partial}{\partial \nu}$ とかくことにして

$$\gamma(\beta_n) = \left(\int_{\beta_n} \left(\frac{\partial w_n}{\partial \nu} - \frac{\partial \check{w}_n}{\partial \nu} \right) dS \right)^{-1} \tag{11}$$

を β_n の<u>第一種エネルギー</u>と呼ぶことにする．更に β_n 上の測度

$$d\mu_n = \gamma(\beta_n) \left(\frac{\partial w_n}{\partial \nu} - \frac{\partial \check{w}_n}{\partial \nu} \right) dS \tag{12}$$

を β_n の第一種エネルギー測度と呼ぶ.

定理1: β_n の第一種エネルギー測度は単位正測度で

(13) $$\gamma(\beta_n)=\iint G(x,y)\,d\mu_n(x)\,d\mu_n(y)$$

となり更に(5)(6)の仮定があると

(14) $$\lim_{n\to\infty}\gamma(\beta_n)=\infty.$$

証明. $\check{w}_{n,p}$ を $M_{n+p}-\bar{M}_n$ 上 $Au=0$ の解で β_n と β_{n+p} における境界値を夫々 1 と 0 であるものとする. $w_{n,p}\nearrow w_n$ $(p\to\infty)$ である. M_{n+p} 上の Green 函数を $G_{n+p}(x,y)$ とすると上と同様 $G_{n+p}(x,y)\nearrow G(x,y)$ $(p\to\infty)$ となる. $(b^i(y))$ の外法線成分を $b(y)$ とかき, $x\in M_n$ 中心の小半径 δ の球面を δ_x その内部を (δ_x) とかいて Green の公式を使うと

$$\int_{\beta_n-\beta_0-\delta_x}\left[G_{n+p}(x,y)\frac{\partial w_n(y)}{\partial\nu_y}+b(y)\,w_n(y)\,G_{n+p}(x,y)-w_n(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}G_{n+p}(x,y)\right]dS_y$$

$$=\int_{M-(\delta_x)}\left[G_{n+p}(x,y)\,A_y w_n(y)-w_n(y)\,A_y^{*}G_{n+p}(x,y)\right]dV_y=0.$$

ここに A^* は A の形式的共役作用素, dV は Riemann 計量 $(a_{ij}(x))$ に関する体積要素とする. $\delta\to0$ として

$$(15)\quad w_n(x) = \int_{\beta_n} \left[G_{n+p}(x,y)\frac{\partial w_n(y)}{\partial \nu_y} - \frac{\partial}{\partial \nu_y} G_{n+p}(x,y) + b(y) G_{n+p}(x,y) \right] dS_y$$

を得る．同じく $x \in M_n$ とし Green の公式で

$$\int_{\beta_{n+p}-\beta_n} \left[G_{n+p}(x,y)\frac{\partial \check{w}_{n+p}(y)}{\partial \nu_y} + b(y)\check{w}_{n+p}(y) G_{n+p}(x,y) - \check{w}_{n+p}(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y} G_{n+p}(x,y) \right] dS_y$$

$$= \int_{M_{n+p}-\bar{M}_n} \left[G_{n+p}(x,y) A_y \check{w}_{n+p}(y) - \check{w}_{n+p}(y) A_y^* G_{n+p}(x,y) \right] dV_y = 0.$$

こゝで β_n における $\frac{\partial}{\partial \nu_y}$ はやはり M_n について外向きとし，

$$(16)\quad \int_{\beta_n} \left[G_{n+p}(x,y)\frac{\partial \check{w}_{n+p}(y)}{\partial \nu_y} + b(y) w_{n+p}(y) G_{n+p}(x,y) - \frac{\partial}{\partial \nu_y} G_{n+p}(x,y) \right] dS_y = 0$$

をうる．(15)−(16) を作り $p \to \infty$ として

$$(17)\qquad w_n(x) = \int_{\beta_n} G(x,y)\left(\frac{\partial w_n(y)}{\partial \nu_y} - \frac{\partial \check{w}_n(y)}{\partial \nu_y} \right) dS_y$$

が出る．こゝでは $x \in M_n$ としたが (7) により右辺が $\bar{M}_n$ 上連続なことから (17) は $x \in \bar{M}_n$ で正しい．β_n 上 $\frac{\partial w_n}{\partial \nu_y} \geq 0$, $\frac{\partial \check{w}_n}{\partial \nu_y} \geq 0$ だから $d\mu_n \geq 0$ 且 $\int d\mu_n = 1$ である．(17) から

$$(18)\qquad \gamma(\beta_n) w_n(x) = \int_{\beta_n} G(x,y)\, d\mu_n(y) \qquad (x \in \bar{M}_n).$$

ついでながら，$x \in M_{n+p} - \bar{M}_n$ として上と同様の議論を行うことにより

$$(18)'\qquad \gamma(\beta_n)\check{w}_n(x) = \int_{\beta_n} G(x,y)\, d\mu_n(y) \qquad (x \in M - M_n)$$

も示される．これは当面不要だけれど後に§8で利用する．
さて $x \in \beta_n$ に対する(18)の両辺を $d\mu_n$ で積分して(13)をうる．
次に(5)，(6)を仮定して $x_0 \in M_1$ を固定するとき

$$a_0 = \inf_{y \in M - M_1} G(x_0, y) > 0$$

だから再び(18)により

$$\gamma(\beta_n)\, w_n(x_0) = \int_{\beta_n} G(x_0, y)\, d\mu_n(y) \geq a_0$$

より

$$\gamma(\beta_n) \geq a_0 / w_n(x_0).$$

所で $w_n \downarrow w$ $(n \to \infty)$ となる M 上 $Au=0$ の解 w があり，(6)があると M 上 $G(x, y) \geq w(x)$ となって $w \equiv 0$ を結論できる．
よって $w(x_0) \downarrow 0$ から(14)をうる．

§5. 超越直径 $\delta(\hat{\beta}_n)$

$\{M_n\}$ と同様の $\{\hat{M}_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\overline{M_n} \subset \alpha \cup \hat{M}_n \subset \overline{\hat{M}_n} \subset \alpha \cup M_{n+1}$ となり且 β_n の外部A測度 $\check{w}_n$ が

(19) $$\check{w}_n \,|\, \partial \hat{M}_n \geq 1/2$$

を満足する様にとる．β_n と同様

$$\hat{\beta}_n = \partial \hat{M}_n - \alpha$$

と書く．

(20) $$\delta_k(\hat{\beta}_n) = \binom{k}{2}^{-1} \inf_{x_1, \cdots, x_k \in \hat{\beta}_n} \sum_{i<j}^{1, \cdots, k} G(x_i, x_j),$$

(21) $$\delta_k(\beta) = \binom{k}{2}^{-1} \inf_{x_1^*,\dots,x_k^* \in \beta} \sum_{i<j}^{1,\dots,k} G(x_i^*, x_j^*)$$

とおくと

(22) $$\delta(\hat{\beta}_n) = \lim_{k\to\infty} \delta_k(\hat{\beta}_n), \qquad \delta(\beta) = \lim_{k\to\infty} \delta_k(\beta)$$

が存在することは見易い．これらを夫々 $\hat{\beta}_n$ 及び β の<u>超越直径</u>と呼ぶ．

$\hat{\beta}_n$ の外部A測度を $\check{\hat{w}}_n$ とかくとき，仮定(6)から(5)と共に

(23) $$\sup_{x,y\in M-M_1} \frac{G(x,y)}{G(y,x)} \le q, \quad \inf_{x\in M-M_1} \check{\hat{w}}_1(x) \ge 1/q$$

となる正数 $q \ge 1$ の存在がわかる．この q は以后主定理の証明の終了迄くり返し現われる．

<u>定理2</u>：　$\delta(\beta) \ge q^{-4}\,\delta(\hat{\beta}_n) \quad (n=1,2,\cdots).$

証明．$x_1^*,\cdots,x_k^* \in \beta$ を任意にとる．$\hat{w}_n \ge \hat{w}_1 | M-M_n$ により

(24) $$\inf_{x\in M-M_n} \hat{w}_n(x) \ge 1/q$$

となる．さて $x_1,\cdots,x_k \in \hat{\beta}_n$ を

(25) $$q^{-4}\sum_{i<j}^{1,\dots,l} G(x_i,x_j) + q^{-1}\sum_{j=1}^{l+1}\sum_{i=l+2}^{k} G(x_j,x_i^*) + \sum_{i<j}^{l+2,\dots,k} G(x_i^*,x_j^*) \le \sum_{i<j}^{1,\dots,k} G(x_i^*,x_j^*)$$

が各 $l=1,2,\cdots,k$ で成立する様にえらぶ．但し意味をなさな

い項は0と考える．それには数学的帰納法で，初め

$$h_1(x)=\sum_{i=2}^{k} G(x,x_i^*)$$

とおき $x_1\in\hat{\beta}_n$ で $h_1(x_1)=min_{x\in\hat{\beta}_n} h_1(x)$ となるものをとると(6)から $h_1(x)\geq h_1(x_1)\check{\tilde{w}}_n(x)$ $(x\in M-M_n)$ となり従って $h_1(x_1^*)\geq g^{-1}h_1(x_1)$．これから $l=1$ に対する(25)をうる．$x_1,\cdots,x_{l-1}\in\hat{\beta}_n$ $(l-1\leq k-1)$ 迄(25)をみたす如く取れたとして

$$h_l(x)=\sum_{j=l+1}^{k} G(x,x_j^*)+g^{-2}\sum_{j=1}^{l-1} G(x,x_j)$$

とおき $x_l\in\hat{\beta}_n$ を $h_l(x_l)=min_{x\in\hat{\beta}_n} h_l(x)$ なる如くにとると再び(6)より $h_l(x)\geq h_l(x_l)\check{\tilde{w}}_n(x)$ $(x\in M-M_n)$ となり，従って前同様 $h_l(x_l^*)\geq g^{-1}h_l(x_l)$ 即ち

$$g^{-1}\sum_{j=l+1}^{k} G(x_l,x_j^*)+g^{-4}\sum_{j=1}^{l-1} G(x_l,x_j)\leq\sum_{j=l+1}^{k} G(x_l^*,x_j^*)+g^{-2}\sum_{j=1}^{l-1} G(x_l^*,x_j^*).$$

よって(23)により

$$\text{(26)}\quad g^{-1}\sum_{j=l+1}^{k} G(x_l,x_j^*)+g^{-4}\sum_{j=1}^{l-1} G(x_l,x_j)\leq\sum_{j=l+1}^{k} G(x_l^*,x_j^*)+g^{-1}\sum_{j=1}^{l-1} G(x_j^*,x_l^*)$$

となる．$x_1,\cdots,x_{l-1}$ に対する(25)

$$g^{-4}\sum_{i<j}^{1,\cdots,l-2} G(x_i,x_j)+g^{-1}\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{i=l}^{k} G(x_j,x_i^*)+\sum_{i<j}^{l,\cdots,k} G(x_i^*,x_j^*)\leq\sum_{i<j}^{1,\cdots,k} G(x_i^*,x_j^*)$$

の左辺第2項 $=g^{-1}\sum_{j=1}^{l-1} G(x_i,x_l^*)+g^{-1}\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{i=l+1}^{k} G(x_j,x_i^*)$ 及び左辺第3項 $=\sum_{i<j}^{l+1,\cdots,k} G(x_i^*,x_j^*)+\sum_{j=l+1}^{k} G(x_l^*,x_j^*)$ の様にかき(26)を使うと

$$q^{-4}\sum_{i<j}^{1,\dots,l-1} G(x_i,x_j)+q^{-1}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=l+1}^{k} G(x_j,x_i^*)+\sum_{i<j}^{l+1,\dots,k} G(x_i^*,x_j^*)\le\sum_{i<j}^{1,\dots,k} G(x_i^*,x_j^*)$$

即ち(25)が $x_1,\dots,x_l$ 迄成立することがわかる. こゝで特に(25)の $l=k$ の時を考えて

$$q^{-4}\sum_{i<j}^{1,\dots,k} G(x_i,x_j)\le\sum_{i<j}^{1,\dots,k} G(x_i^*,x_j^*)$$

この左辺 $\geq q^{-4}\binom{k}{2}\delta_k(\hat{\beta}_n)$, 即ち

$$q^{-4}\binom{k}{2}\delta_k(\hat{\beta}_n)\le\sum_{i<j}^{1,\dots,k} G(x_i^*,x_j^*).$$

右辺で $x_1^*,\dots,x_k^*\in\beta$ の任意性からそれらに関する下限をとり $q^{-4}\delta_k(\hat{\beta}_n)\le\delta_k(\beta)$, そして $k\to\infty$ とすればよい.

§6 第二種エネルギー $\hat{\gamma}(\hat{\beta}_n)$

単位正測度 μ の支え S_μ が $\hat{\beta}_n$ に入る様なものについての下限を考えて

$$\hat{\gamma}(\hat{\beta}_n)=\inf_{\mu}\iint G(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y) \tag{27}$$

を $\hat{\beta}_n$ の第二種エネルギーと呼ぶことにする.

定理3: $\delta(\hat{\beta}_n)\geq\dfrac{1+q}{2q}\hat{\gamma}(\hat{\beta}_n)\quad(n=1,2,\cdots).$

証明 $x_1^{(k)}, \cdots, x_k^{(k)} \in \hat{\beta}_n$ を

(28) $$\binom{k}{2}\delta_k(\hat{\beta}_n)+1 \geq \sum_{i<j}^{1,\cdots,k} G(x_i^{(k)}, x_j^{(k)})$$

となる様にとる．単位測度 ν_k，$S_{\nu_k} \subset \hat{\beta}_n$，を $\nu_k(x_j^{(k)}) = 1/k$ $(j=1,2,\cdots,k)$ となるものとする．$\{\nu_{k'}\}$ を $\{\nu_k\}$ の漠収束部分列としその極限を ν とすると $S_\nu \subset \hat{\beta}_n$ 且 $\nu(\hat{\beta}_n) = 1$ である．
正数 t に対し $G^t = \min(G, t)$ とおくと (28) から

$$\binom{k'}{2}\delta_{k'}(\hat{\beta}_n)+1 \geq \sum_{i<j}^{1,\cdots,k'} G^t(x_i^{(k')}, x_j^{(k')})$$

$$\geq \sum_{i<j}^{1,\cdots,k'} \frac{1}{q} G^t(x_j^{(k')}, x_i^{(k')})$$

となり従って

$$\binom{k'}{2}\delta_{k'}(\hat{\beta}_n)+1 \geq \frac{1+q}{2q} \sum_{i\neq j}^{1,\cdots,k'} G^t(x_i^{(k')}, x_j^{(k')})$$

$$= \frac{1+q}{2q}\left(\sum_{i,j=1}^{k'} G^t(x_i^{(k')}, x_j^{(k')}) - k't\right)$$

$$= \frac{1+q}{2q}\left(\iint G^t(x,y)\,d\nu_{k'}(x)\,d\nu_{k'}(y) - k't\right).$$

両辺を $\binom{k'}{2}$ でわり $k' \to \infty$ とし次に $t \to \infty$ として

$$\delta(\hat{\beta}_n) \geq \frac{1+q}{2q}\iint G(x,y)\,d\nu(x)\,d\nu(y) \geq \frac{1+q}{2q}\hat{\gamma}(\hat{\beta}_n).$$

§7 最大値原理

M内のBorel正測度μでその支えS_μが完閉なものに対して

$$(29)\qquad G_\mu(x)=\int G(x,y)\,d\mu(y)$$

をμによるGreenポテンシャルと言う．これはM上下半連続でM$-S_\mu$上$Au=0$の解であって，αで境界値0，βで"境界値"0をとる．

<u>定理4</u>：$G_\mu|S_\mu$ <u>が有限連続であれば</u> G_μ <u>は</u>M<u>上有限連続である</u>．

証明．$x_0\in S_\mu$を任意にとりx_0中心の小球B_0をとる．BをB_0内の同心小球とし$\mu'=\mu|B$，$\mu''=\mu|M-B$とおくと

$$(30)\qquad G_\mu=G_{\mu'}+G_{\mu''}$$

の分解中$G_{\mu''}$はx_0で連続である．故に両辺のS_μへの制限を考えることにより$G_{\mu'}|S_\mu$は連続である．よって任意の$\varepsilon>0$に対しBを充分小にとると

$$(31)\qquad \mu'(B)<\varepsilon,\quad G_{\mu'}(x_0)<\varepsilon,\quad G_{\mu'}|S_\mu\cap B<\varepsilon$$

に出来る．(7)により正常数$p\geq 1$が存在して

$$(32)\qquad \begin{cases} p^{-1}|x-y|^{2-m}\leq G(x,y)\leq p\,|x-y|^{2-m} & (m\geq 3)\\ p^{-1}\log|x-y|^{-1}\leq G(x,y)\leq p\log|x-y|^{-1} & (m=2)\end{cases}$$

が $x, y \in B_0$ に対して成立する．$x \in B$ とし，y を x から $S_\mu \cap B$ への最短距離を与える $S_\mu \cap B$ の点とするとすべての $z \in S_\mu \cap B$ に対し $|y-z| \leq |x-y| + |x-z| \leq 2|x-z|$ 故

$$(33) \qquad \int |x-z|^{2-m} d\mu'(z) \leq 2^{m-2} \int |y-z|^{2-m} d\mu'(z) \qquad (m \geq 3)$$

だからこれと (32) と (31) から

$$(34) \qquad G_{\mu'}(x) \leq 2^{m-2} p^2 \varepsilon .$$

又 $m=2$ の時は

$$(33)' \qquad \int \log \frac{1}{|x-z|} d\mu'(z) \leq \int \log \frac{1}{|y-z|} d\mu'(z) + \mu'(B) \log 2$$

だから再び (32) と (31) から

$$(34)' \qquad G_{\mu'}(x) \leq (p^2 + p \log 2) \varepsilon .$$

他方 $x \in B$ とすると

$$|G_\mu(x) - G_\mu(x_0)| \leq |G_{\mu''}(x) - G_{\mu''}(x_0)| + |G_{\mu'}(x)| + |G_{\mu'}(x_0)|$$

だから (34) 及び (34') から

$$\limsup_{x \to x_0} |G_\mu(x) - G_\mu(x_0)| = O(\varepsilon).$$

定理 5. $G_\mu | S_\mu \leq k$ ならば M 上 $G_\mu \leq k$ となる

証明. 任意の正数 ε と任意の点 $x \in M - S_\mu$ をとる．S_μ 内

の完閉集合 K をとり $\mu'=\mu|K$, $\mu''=\mu|S_\mu-K$ とおく. 更に K に対し Lusin の定理から, $G_\mu|K$ は連続且 $\mu''(S_\mu)=\mu(S_\mu-K)$ を充分小にとって $G_{\mu''}(x)<\varepsilon$ となる様に K をとっておく.

$$G_{\mu'}|K = G_\mu|K - G_{\mu''}|K$$

の左辺は下半連続, 右辺は「連続」－「下半連続」だから上半連続, 従って $G_{\mu'}|K$ は $K=S_{\mu'}$ 上連続で定理4から $G_{\mu'}$ は M 上連続である. 従って $G_{\mu'}|M-S_{\mu'}$ は最大値を $\partial(M-S_{\mu'})\cap S_{\mu'}$ で取ることにより, $G_{\mu'}|S_{\mu'}\leq G_\mu|S_{\mu'}\leq k$ を合せ考えて M 上 $G_{\mu'}\leq k$ となる. 故に $G_\mu(x)=G_{\mu'}(x)+G_{\mu''}(x)\leq k+\varepsilon$. ε の任意性から $G_\mu(x)\leq k$ をうる.

§8. Schwarz 型不等式

Borel 正測度 θ, η の内積を

$$(\theta,\eta)=\iint G(x,y)\,d\theta(y)\,d\eta(x)$$

と定める. 勿論通常の意味での内積の条件を満足しない.

<u>定理</u>6: θ, η <u>を夫々 β_n, $\hat{\beta}_n$ 上の正測度とすると</u>

(35) $$(\theta,\theta)(\eta,\eta)\geq \delta^{-4}(\theta,\eta)^2.$$

証明. β_n, $\hat{\beta}_n$ 上の正測度 θ, η で $(\theta,\theta)<\infty$, $(\eta,\eta)<\infty$ と

なるものばかり考え，かゝる測度の組 θ, η に関する変分

$$N(\theta, \eta) = \frac{(\theta, \theta)\cdot(\eta, \eta)}{(\theta, \eta)^2}$$

を考える．$N(\theta, \eta)$ が θ, η に関して斉次故変分問題

$$\inf_{\theta, \eta} N(\theta, \eta)$$

に於て θ，η 共に単位測度に限定出来ることにより漠完閉性により，上述の如き単位測度の組 $\bar{\theta}, \bar{\eta}$ で

(36) $$N(\bar{\theta}, \bar{\eta}) = \inf_{\theta, \eta} N(\theta, \eta)$$

となるものが存在する．そこで

(37) $$(\bar{\theta}, \bar{\theta}) = a, \quad (\bar{\eta}, \bar{\eta}) = b, \quad (\bar{\theta}, \bar{\eta}) = t$$

とかき

(38) $$\varphi(x) = q^{-1} t G_{\bar{\theta}}(x) - q a G_{\bar{\eta}}(x), \quad \hat{\varphi}(x) = q^{-1} t G_{\bar{\eta}}(x) - q b G_{\bar{\theta}}(x)$$

を考える．

$\beta_{n,\ell} = \{x \in \beta_n \mid \varphi(x) \geq 1/\ell\}$，$\bar{\theta}_\ell = \bar{\theta} \mid \beta_{n,\ell}$ $(\ell = 1, 2, \cdots)$ とおくと，$0 < \varepsilon < 1$ なる ε に対し $\bar{\theta} - \varepsilon \bar{\theta}_\ell$ は β_n 上の正測度だから，(36) により

$$N(\bar{\theta}, \bar{\eta}) \leq N(\bar{\theta} - \varepsilon \bar{\theta}_\ell, \bar{\eta}).$$

これを変形して

$$0 \leq 2t\left[-\varepsilon t\frac{(\bar{\theta},\bar{\theta}_\ell)+(\bar{\theta}_\ell,\bar{\theta})}{2}+\varepsilon a(\bar{\theta}_\ell,\bar{\eta})\right]+\left[t^2\varepsilon^2(\bar{\theta}_\ell,\bar{\theta}_\ell)-a\varepsilon^2(\bar{\theta}_\ell,\bar{\eta})^2\right]$$

となるが更に

$$0 \leq 2t\ [-\varepsilon t g^{-1}(\bar{\theta},\bar{\theta}_\ell)+\varepsilon a g(\bar{\eta},\bar{\theta}_\ell)] + t^2\varepsilon^2(\bar{\theta}_\ell,\bar{\theta}_\ell)$$

が出る. 書きかえて

$$0 \leq -2\varepsilon t\int \varphi(x)\,d\bar{\theta}_\ell(x) + t^2\varepsilon^2(\bar{\theta}_\ell,\bar{\theta}_\ell).$$

故に $\beta_{n,\ell}$ の定義をみて

$$0 \leq -2\varepsilon t\frac{1}{\ell}\bar{\theta}_\ell(\beta_{n,\ell}) + t^2\varepsilon^2(\bar{\theta}_\ell,\bar{\theta}_\ell).$$

これから $\bar{\theta}_\ell(\beta_{n,\ell})=\bar{\theta}(\beta_{n,\ell})=0$ ($\ell=1,2,\cdots$), 即ち $S_{\bar{\theta}}$ 上 $\bar{\theta}$-a.e. に $\varphi(x)\leq 0$ である. 所が $G_{\bar{\eta}}$ は $S_{\bar{\theta}}$ 上連続, $G_{\bar{\theta}}$ は $S_{\bar{\theta}}$ 上下半連続だから, 実は $S_{\bar{\theta}}$ 上到る所 $\varphi(x)\leq 0$, 即ち

(39) $$g^{-1}t\,G_{\bar{\theta}}(x) \leq g\,a\,G_{\bar{\eta}}(x) \qquad (x\in S_{\bar{\theta}}).$$

次に $\hat{\beta}_{n,\ell}=\{x\in\hat{\beta}_n \mid \hat{\varphi}(x)\geq 1/\ell\}$, $\bar{\eta}_\ell=\bar{\eta}\mid\hat{\beta}_{n,\ell}$ ($\ell=1,2,\cdots$) とおくと, $0<\varepsilon<1$ に対し

$$N(\bar{\theta},\bar{\eta}) \leq N(\bar{\theta},\bar{\eta}-\varepsilon\bar{\eta}_\ell).$$

これから (39) を導びいたと同じ様な推論をくり返して, $\hat{\varphi}(x)\leq 0$ ($x\in S_{\bar{\eta}}$), 即ち

(40) $$g^{-1} t\, G_{\bar{\eta}}(x) \leq g\, b\, G_{\bar{\theta}}(x) \qquad (x \in S_{\bar{\eta}})$$

が結論できる.

(39), 定理5, (40), 定理5の順に使って

$$g^{-2}\frac{t}{a}\sup_{x\in S_{\bar{\theta}}} G_{\bar{\theta}}(x) \leq \sup_{x\in S_{\bar{\theta}}} G_{\bar{\eta}}(x) \leq \sup_{x\in S_{\bar{\eta}}} G_{\bar{\eta}}(x)$$

$$\leq g^{2}\frac{b}{t}\sup_{x\in S_{\bar{\eta}}} G_{\bar{\theta}}(x) \leq g^{2}\frac{b}{t}\sup_{x\in S_{\bar{\theta}}} G_{\bar{\theta}}(x)$$

となり, 最初と最后の項をくらべて $g^{-2}\frac{t}{a} \leq g^{2}\frac{b}{t}$ より

$$g^{-4} \leq \frac{ab}{t^2} = N(\bar{\theta}, \bar{\eta}) \leq N(\theta, \eta)$$

となり $(\theta,\theta), (\eta,\eta) < \infty$ となる時 (35) がみちびかれる. この仮定のないとき (35) は自明となる.

<u>定理</u>7: $\hat{\gamma}(\hat{\beta}_n) \geq \frac{1}{4g^4}\gamma(\beta_n) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$.

証明. μ_nをβ_nの第一種エネルギー測度, νを$\hat{\beta}_n$上の任意の単位正測度とすると (35) より

(41) $$(\mu_n, \nu)^2 \leq g^4 (\mu_n, \mu_n)\cdot(\nu, \nu).$$

又(18)′, 即ち $\gamma(\beta_n)\check{w}_n(x) = G_{\mu_n}(x) \ (x \in M - M_n)$ により (19)

を使うと $x \in \hat{\beta}_n$ に対し

$$\frac{\gamma(\beta_n)}{2} \leq G_{\mu_n}(x)$$

をうる．両辺を $\hat{\beta}_n$ 上 ν で積分すると，そして自乗して

$$\frac{\gamma(\beta_n)^2}{4} \leq (\mu_n, \nu)^2$$

となる．これを (41) に代入し (13)，即ち $\gamma(\beta_n) = (\mu_n, \mu_n)$ を使うと

$$\frac{1}{4q^4}\gamma(\beta_n) \leq (\nu, \nu)$$

となる．こゝで ν についての下限をとって定理をうる．

§9　Tchebycheff 定数 $\tau(\beta)$

最后に β に対する量で（改変された）Tchebycheff 定数と呼ぶものを

(42) $$\tau(\beta) = \lim_{k\to\infty} \tau_k(\beta),$$

(43) $$\tau_k(\beta) = \frac{1}{k} \sup_{x_1^*, \dots, x_k^* \in \beta} \left\{ \inf_{x^* \in \beta} \sum_{j=1}^{k} G(x^*, x_j^*) \right\}$$

で定義する．(42) の極限の存在はほとんど自明である．これと超越直径との間の関係をのべる．

定理 8：　$\tau(\beta) \geq \delta(\beta)$.

証明. 自然数 $l > 1$ に対して $\varepsilon = 1/(l-1)$ とおく. β の点 $x_l^*, x_{l-1}^*, \cdots, x_2^*, x_1^*$ を

$$(44)\qquad \sum_{j=l-i+1}^{l} G(x_{l-i}^*, x_j^*) \leq \inf_{x^* \in \beta} \sum_{j=l-i+1}^{l} G(x^*, x_j^*) + \varepsilon,$$

$i = 1, \cdots, l-1$, となる様に帰納的にえらぶ. まず $x_l^* \in \beta$ は任意にとる. $x_l^*, \cdots, x_{l-i+1}^* \in \beta$ が (44) をみたす様にえらべたとして $x_{l-i}^* \in \beta$ をえらぶため $h(x^*) = \sum_{j=l-i+1}^{l} G(x^*, x_j^*) \geq 0$ を考える. $x_{l-i}^* \in \beta$ を

$$h(x_{l-i}^*) \leq \inf_{x^* \in \beta} h(x^*) + \varepsilon$$

なる如くとれば, これ即ち (44) である.

(44) と $\tau_i(\beta)$ の定義より

$$\sum_{j=l-i+1}^{l} G(x_{l-i}^*, x_j^*) \leq i\,\tau_i(\beta^*) + \varepsilon \quad (i = 1, 2, \cdots, l-1)$$

となり, これらを i について加えて

$$\binom{l}{2} \delta_l(\beta) \leq \sum_{i=1}^{l-1} i\,\tau_i(\beta^*) + 1.$$

両辺を $\binom{l}{2}$ でわり $l \to \infty$ として定理をうる.

定理9：βがA放物的であると

(45) $$\tau(\beta)=\infty.$$

証明．定理8，定理2，定理3，定理7をこの順に使うと凡ての $n=1,2,\cdots$ に対し

$$\tau(\beta)\geq\delta(\beta)\geq\frac{1}{q^4}\,\delta(\hat{\beta}_n)\geq\frac{1+q}{2qq^4}\,\hat{\gamma}(\hat{\beta}_n)$$
$$\geq\frac{1+q}{2qq^4}\cdot\frac{1}{4q^4}\,\gamma(\beta_n).$$

ここで $n\to\infty$ として定理1の(14)を使うと(45)がわかる．

§10．主定理の証明

定理9によると $\tau(\beta)=\infty$ 故自然数の増加列 $\{n_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ で

$$\tau_{n_\ell}(\beta)>2^\ell\cdot\ell\qquad(\ell=1,2,\cdots)$$

となるものがえらべる．すると $x^*_{\ell,j}\in\beta\ (j=1,\cdots,n_\ell)$ で

(46) $$\frac{1}{n_\ell}\inf_{x^*\in\beta}\sum_{j=1}^{n_\ell}G(x^*,x^*_{\ell,j})>2^\ell\cdot\ell$$

となるものがとれる．だから

(47) $$u_\ell(x) = \frac{1}{n_\ell}\sum_{j=1}^{n_\ell} G(x, x^*_{\ell,j})$$

を考えるとこれはM上 $Au=0$ の解で α で境界値 0 かつ (46) からすべての $x^*\in\beta$ に対し

(48) $$\lim_{x\in M,\ x\to x^*} u_k(x) > 2^\ell\cdot\ell$$

をうる. 次に

(49) $$u(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2^\ell}\, u_\ell(x)$$

とおくとやはりM上 $Au=0$ の解で α に於て境界値 0 をもちしかも任意の ℓ に対して, (48) により

$$\liminf_{x\in M,\ x\to x^*} u(x) \geq \liminf_{x\in M,\ x\to x^*} \frac{1}{2^\ell}\, u_\ell(x) \geq \ell$$

だから

(50) $$\lim_{x\in M,\ x\to x^*} u(x) = \infty$$

となる.

故に β が $\alpha\cup M$ のどんな完閉化の境界であるとしても, β 上 $u=\infty$ と定めて u の定義域を $\alpha\cup M\cup\beta$ 迄拡げると, u は $\alpha\cup M\cup\beta$ 上連続となる. 即ち u は問題 $\pi(M, A; \alpha, \beta; 0)$ の解となる.

80

次に $f \in C_0^1(M \cup \alpha)$ をとるとき

$$(51) \qquad v(x) = \int_M G(x, y) f(y) dV_y$$

は M上 $Av = f$ を満足し且 M 上有界となることがわかる故 $u+v$ が問題 $\pi(M, A; \alpha, \beta, f)$ の解となる.

参 考 文 献

[1] G. C. Evans: Potentials and positively infinite singularities of harmonic functions, Monatsheft für Math. Phys., 43 (1936), 419-424.

[2] M. Inoue: Positively infinite singularities of solutions of linear elliptic partial differential equations, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ., 8 (1957), 43-50.

[3] S. Itô: Fundamental solutions of parabolic differential equations and boundary value problems, Japanese J. Math., 27 (1957), 55-102

[4] S. Itô: On existence of Green function and positive superharmonic functions for linear elliptic operators of second order, J. Math. Soc. Japan, 16 (1964), 299-306.

[5] S. Itô: Martin boundary for linear elliptic differential operators of second order in a manifold, J. Math. Soc. Japan, 16 (1964), 307-334.

[6] Z. Kuramochi: Mass distributions on the ideal boundaries of abstract Riemann surfaces, I., Osaka Math. J., 8 (1956), 119-137.

[7] C. Miranda: Equazioni alle Derivate Parziali di Tipo ellipttico, Springer, 1955.

[8] M. Nakai: On Evans potential, Proc. Japan Acad., 38 (1962), 624-629.

[9] M. Nakai: Evans harmonic function on Riemann surfaces, Proc. Japan Acad., 39 (1963), 74-78.

[10] M. Nakai: On Evans' solution of the equation $\Delta u = Pu$ on Riemann surfaces, Kôdai Math. Sem. Rep., 15 (1963), 79-93.

[11] M. Nakai: Green potential of Evans type on Royden's compactification of a Riemann surface, Nagoya Math. J., 24 (1964), 205-239.

[12] M. Nakai: Infinite boundary value problem, Proc. Japan Acad., 44 (1968), 139-140.

[13] K. Noshiro: Contributions to the theory of singularities

of analytic functions, Japanese J. Math., 19 (1948), 299-327.

[14] L. Sario and K. Noshiro: Value Distribution Theory, Van Nostrand, 1966

[15] H. Selberg: Über die ebenen Punktmengen von der Kapazität Null, Avh. Norske Videnskaps-Acad. Oslo I Math-Natur, 10 (1937).